

# Sistemas Automáticos

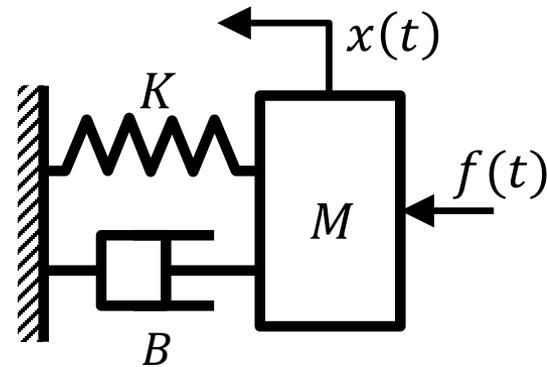
## Análisis de sistemas de primer y segundo orden

**D. Tardioli, E. Montijano**  
Centro Universitario de la Defensa  
Academia General Militar  
A. A. 2015/2016



# Proceso de control de un sistema

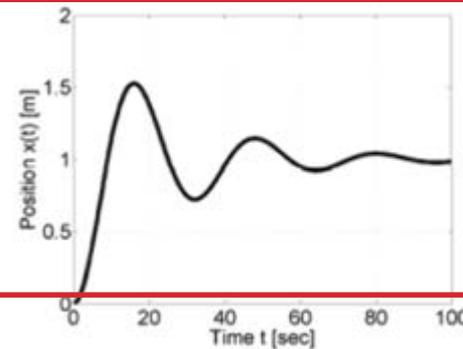
- Modelado



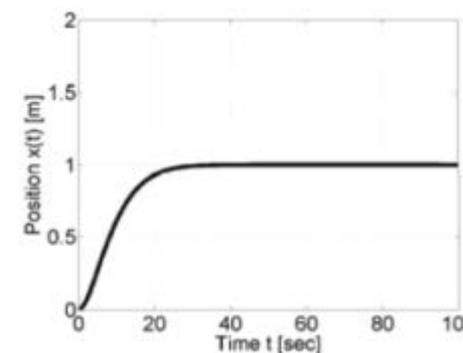
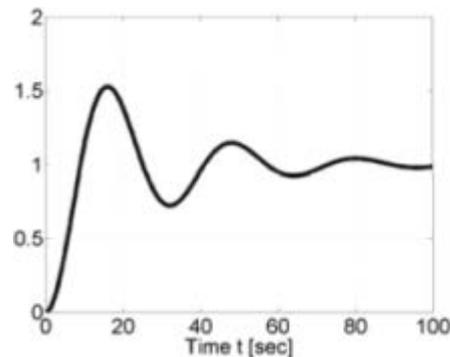
$$f(t) = M\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + Kx(t)$$

- Análisis

$$f(t) = M\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + Kx(t) \rightarrow$$



- Control



# Índice

- Elementos de interés en el análisis de sistemas
  - Entrada y **función de transferencia**
  - Régimen **transitorio** y **permanente**
- Análisis de sistemas de **primer** y **segundo orden**
- Influencia de **polos** y **ceros adicionales**
- Obtención empírica de la FdT
- **Estabilidad**
- Criterio de Routh-Hurwitz

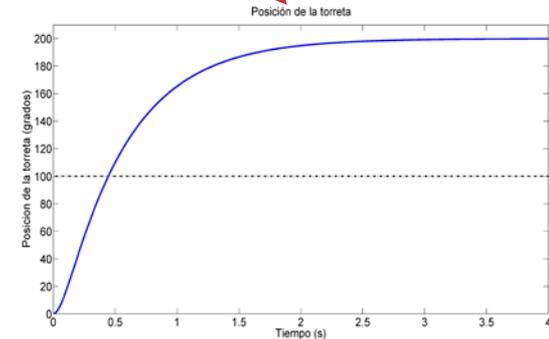
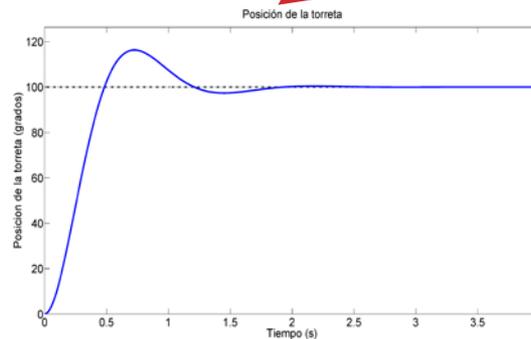
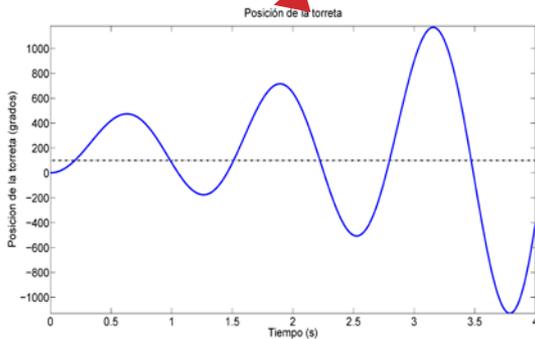
# Objetivos del tema

- Partiendo de un **modelado correcto**
- ¿Cuál es la **salida** de un sistema ante una **entrada** dada?



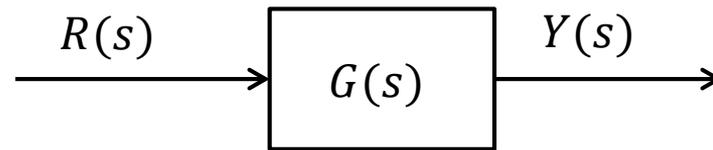
Ejemplo: entrada constante

$$\frac{\Omega(s)}{V_r(s)} = \frac{K_i}{LJs^2 + (RJ + LB)s + RB + K_e K_i}$$



# ¿De qué depende la salida?

- La **salida** depende de



- La **entrada** al sistema
- La **función de transferencia**

$$Y(s) = R(s)G(s)$$

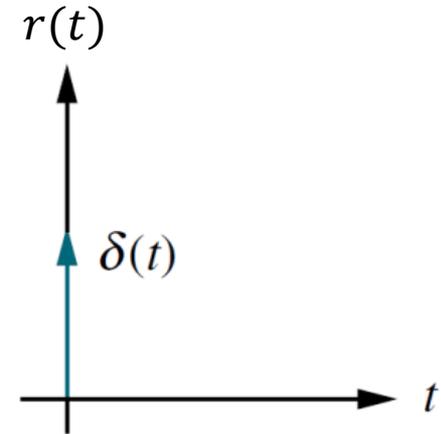
# Entrada al sistema

- Entrada general a un sistema
  - **Modelo matemático complejo** o desconocido
- El análisis se lleva a cabo usando **entradas normalizadas**
  - **Aperiódicas** para el **análisis temporal**
    - Impulso, escalón, rampa, parábola
  - **Periódicas** para el análisis **frecuencial**
    - Sinusoides
  - Modelan comportamientos generales

# Entradas estándar

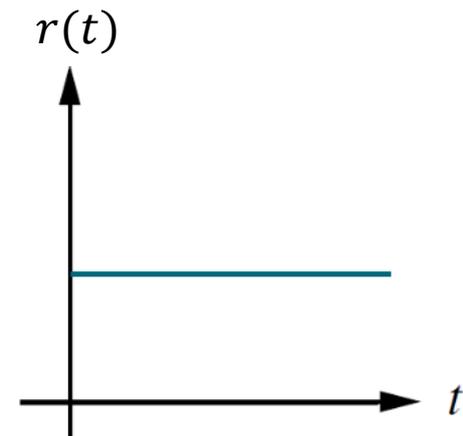
- **Impulso / Delta de Dirac**

- $r(t) = \delta(t) = \infty \mid 0^- < t < 0^+$
- Duración **instantánea**
- Valor **infinito**



- **Escalón**

- Entrada **constante**
- $r(t) = u(t) = 1 \forall t > 0^+$



# Entradas estándar

- **Rampa**

- Velocidad constante

- $r(t) = t \quad \forall t > 0$

- **Parábola**

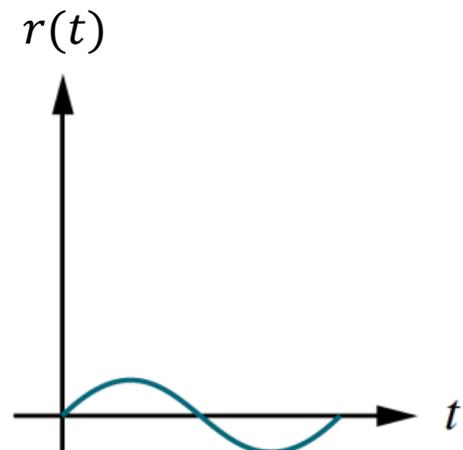
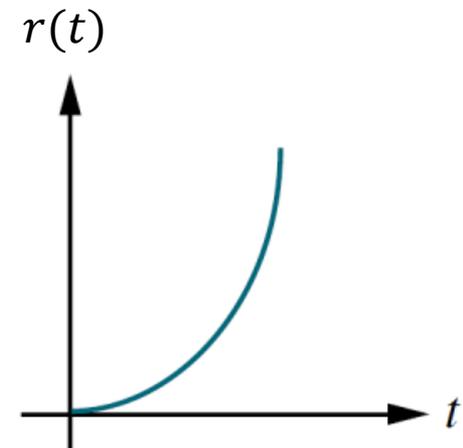
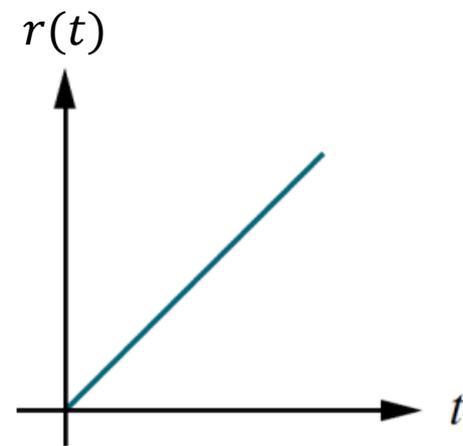
- Aceleración constante

- $r(t) = \frac{1}{2} t^2 \quad \forall t > 0$

- **Sinusoide**

- Variación de **amplitud** y **fase**

- $r(t) = A \sin(\omega t + \phi_0)$

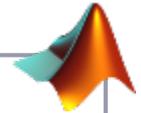


# Entrada al sistema

- ¿Qué representa un **escalón**?
  - Orientación deseada de la torreta del LEGO pardo
  - Voltaje aplicado al circuito
  - Aplicación de una fuerza constante
  - Temperatura deseada en el aula
  - **Cualquier constante**



```
G = tf([3],[1 4]);  
step(G)  
step(G,0:0.1:1);
```



¿Y una **rampa**?

# Características de la respuesta

- Depende de
  - **Número de polos** y ceros
  - **Posición** de los polos y de los ceros en el plano complejo

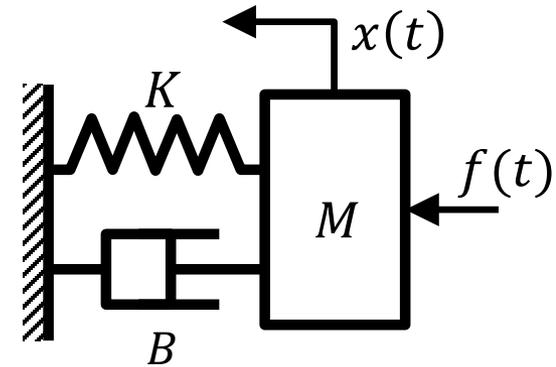
$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_0}{a_n s^n + \dots + a_0} = \eta \frac{\prod(s + z_i)}{\prod(s + p_i)}$$

# Respuesta temporal

- Ejemplo

$$G(s) = \frac{1}{0.04s^2 + 0.2s + 1}$$

$$R(s) = \frac{1}{s}$$



$$M = 0.04, B = 0.2, K = 1$$

```
G(s) := 1/(0.04*s^2 + 0.2*s + 1);  
allroots(0.04*s^2+0.2*s+1=0);  
R(s) := 1/s;  
Y(s) := G(s)*R(s);  
ilt(Y(s), s, t);  
plot2d(%,[t, 0, 5]);
```



Qué pasa si...

¿ $M = 0$ ?

¿ $B = 0$ ?

¿ $B = 2$ ?

¿ $K = 0$ ?

```
s = tf('s')  
G = tf(1/(0.04*s^2 + 0.2*s + 1));  
step(G);
```



# Respuesta temporal al escalón

- Dada  $R(s) = 1/s$
- Respuesta:

$$Y(s) = G(s)R(s) = \eta \frac{\prod(s + z_i)}{\prod(s + p_i)} \cdot \frac{1}{s}$$

- Descomposición en **fracciones simples**:

$$Y(s) = \frac{a}{s} + \sum_{j=1}^q \frac{a_j}{s + p_j} + \sum_{k=1}^r \frac{b_k(s + \sigma_k) + c_k \omega_k}{(s + \sigma_k + j\omega_k)(s + \sigma_k - j\omega_k)}$$

- **Transformada inversa**:

$$y(t) = a + \sum_{j=1}^n a_j e^{-p_j t} + \sum_{k=1}^n b_k e^{-\sigma_k t} \cos \omega_k t + \sum_{k=1}^n c_k e^{-\sigma_k t} \sin \omega_k t$$

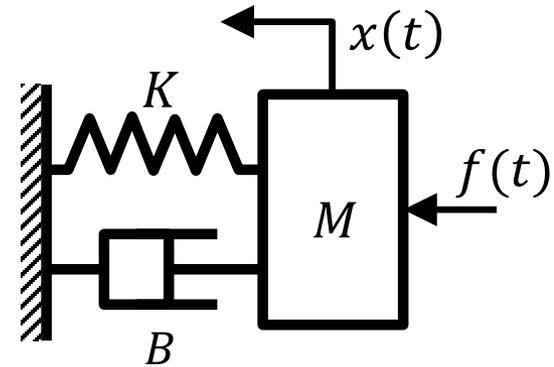
# Clasificación de las respuestas al escalón

- Las respuestas se clasifican según

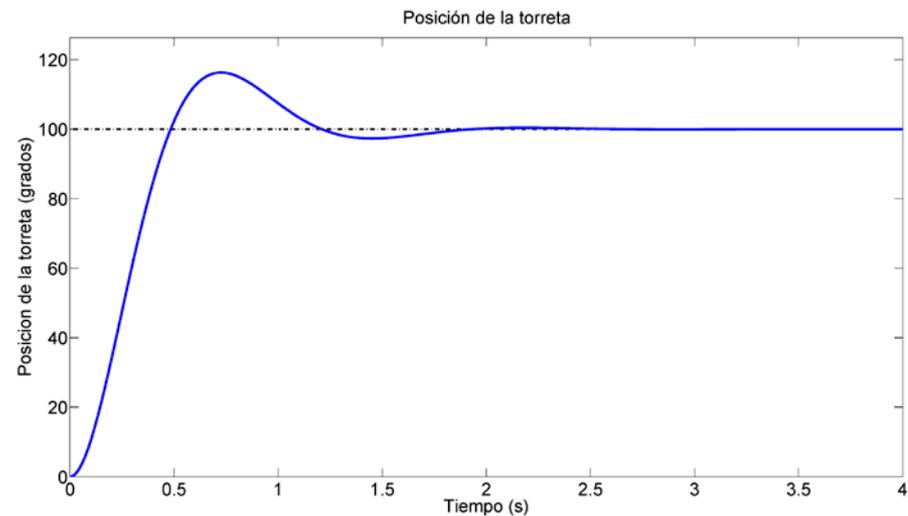
- Orden** del sistema
- Tipo** de la respuesta

- Ejemplo:

- Orden: segundo
- Tipo: subamortiguada



$$M = 0.04, B = 0.2, K = 1$$



# Comportamiento del sistema

- **Respuesta** en función del **orden** de la FdT
  - **Primer orden** (un polo)
  - **Segundo orden** (dos polos)
  - **Orden superior** (tres o más polos)
  - Presencia de **ceros en la FdT**

# Sistemas de primer orden



- **Formas estándar**

$$G(s) = \mu \frac{1}{\tau s + 1} = \mu \frac{a}{s + a}$$

- $\mu$  (mu) se llama **ganancia estática**
- $\tau$  (tau) se llama **constante de tiempo**
- Respuesta  $Y(s)$

$$Y(s) = G(s)R(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s}$$

- Respuesta  $y(t)$  ante entrada **escalón unitario**

$$y(t) = \mu(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = \mu(1 - e^{-at})$$

# Características de la respuesta

- **Ganancia estática  $\mu$  (Gain)**
  - **Valor final** ante entrada escalón unitario

$$\mu = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s)$$

- **Error en el permanente  $e$  (Steady-state error)**
  - **Diferencia** entre el **valor de la entrada** y el **valor final de la salida**

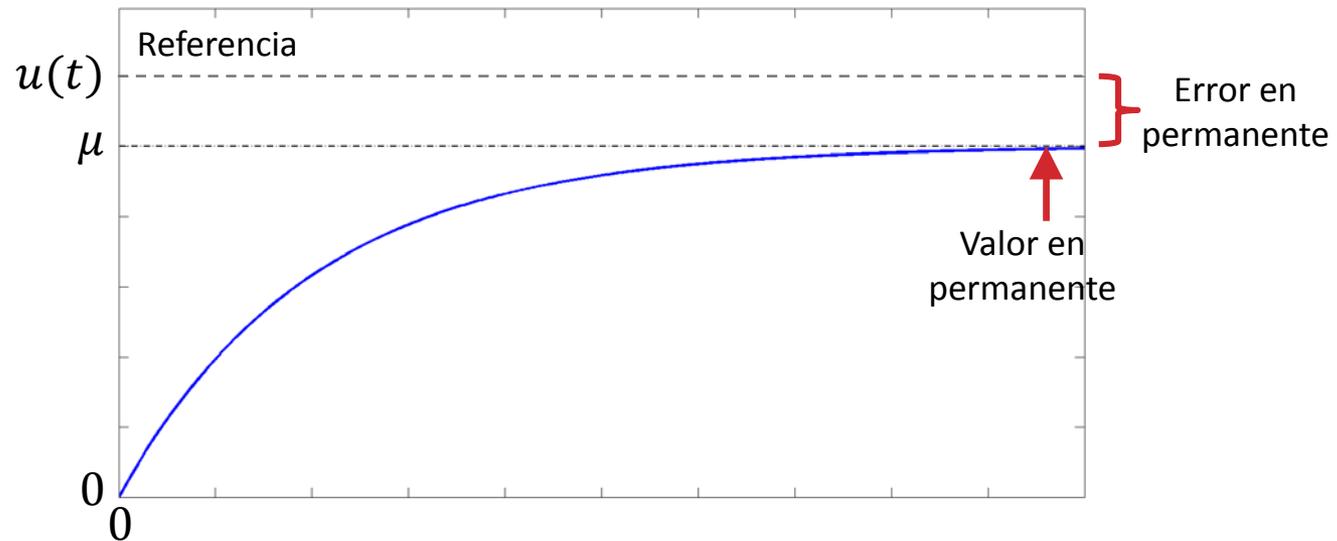
$$e(\infty) = 1 - \mu$$

- Si  $\mu = 1$  entonces el **error es nulo**

**¡Primer orden!**

# Sistemas de primer orden

- Respuesta al **escalón unitario**
  - Características del permanente



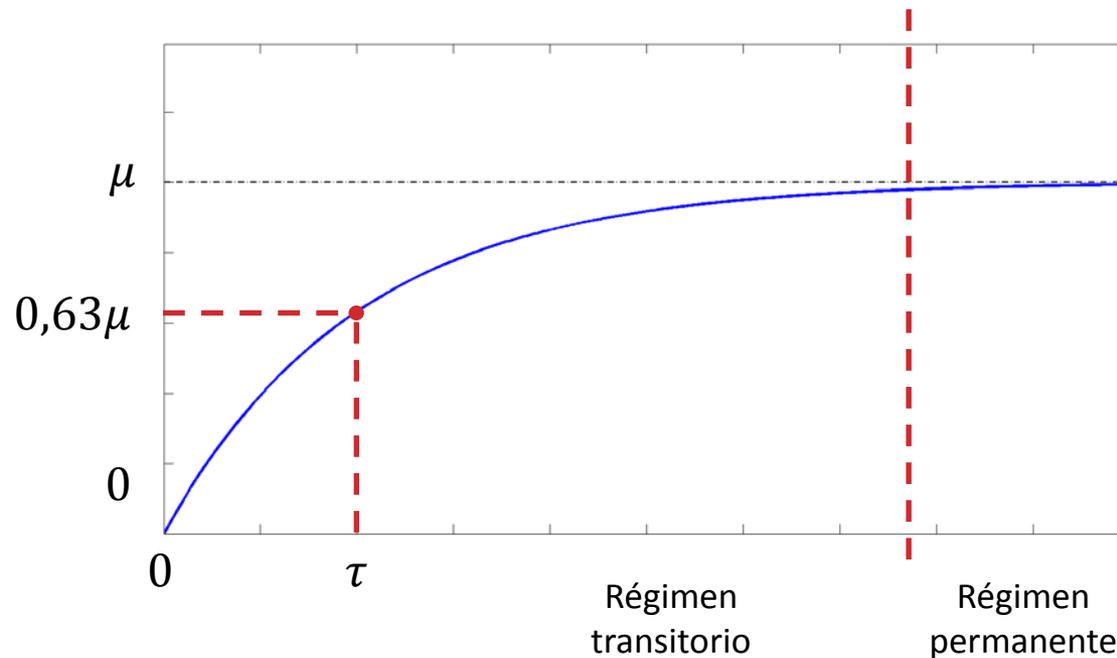
```
s = tf('s')
G = tf(5/6 * 1/(s + 1));
step(G);
```

# Características de la respuesta de 1er orden

- **Régimen transitorio (*Transient response*)**
  - **Respuesta inmediata** del sistema
  - Tiempo de respuesta (*Settling time*)
  - Tiempo de subida (*Rise time*)
- **Régimen permanente (*Steady-state response*)**
  - **Respuesta en  $t = \infty$**  del sistema
  - Ganancia (*Gain*)
  - Error en el permanente (*Steady-state error*)

# Sistemas de primer orden

- Respuesta al **escalón unitario**
  - Ganancia estática / constante de tiempo



```
s = tf('s')  
G = tf(5/6 * 1/(s + 1));  
step(G);
```

# Características de la respuesta

- **Tiempo de respuesta  $T_s$**  (*Settling time*)
  - Tiempo que tarda la salida en encontrarse **dentro** de un porcentaje del valor final (ej. 98%)
  - Marca el **final** del transitorio

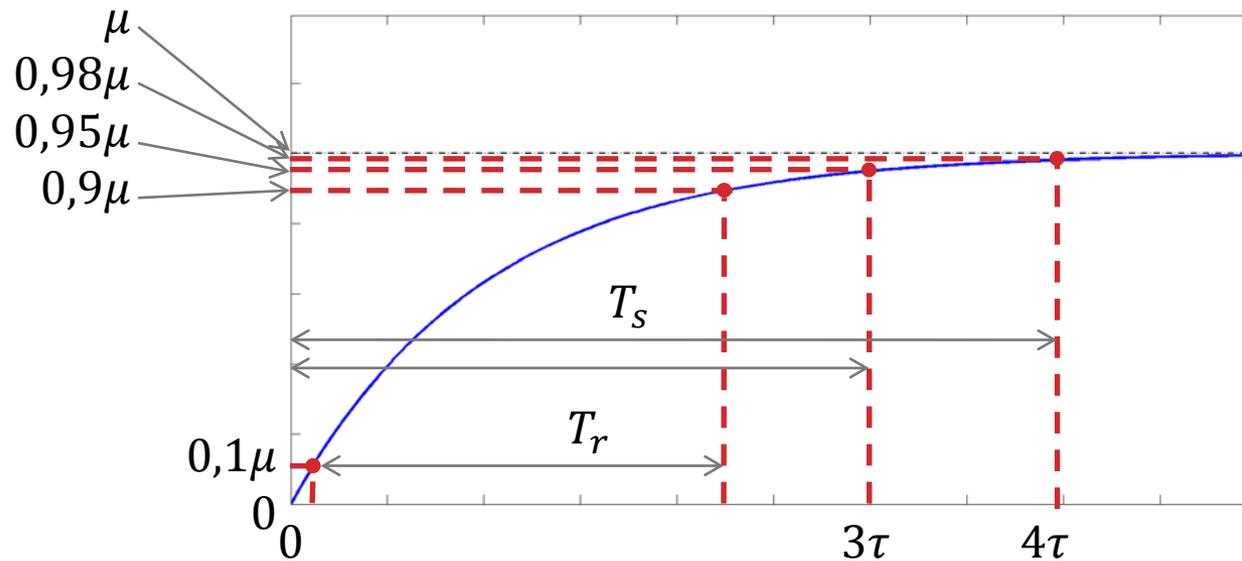
$$T_{s98\%} \approx 4\tau, \quad T_{s95\%} \approx 3\tau$$

- **Tiempo de subida  $T_r$**  (*Rise time*)
  - Tiempo que transcurre entre el **paso por el 10%** y **el 90%** del valor final de la salida

$$T_r \approx 2,2\tau$$

# Sistemas de primer orden

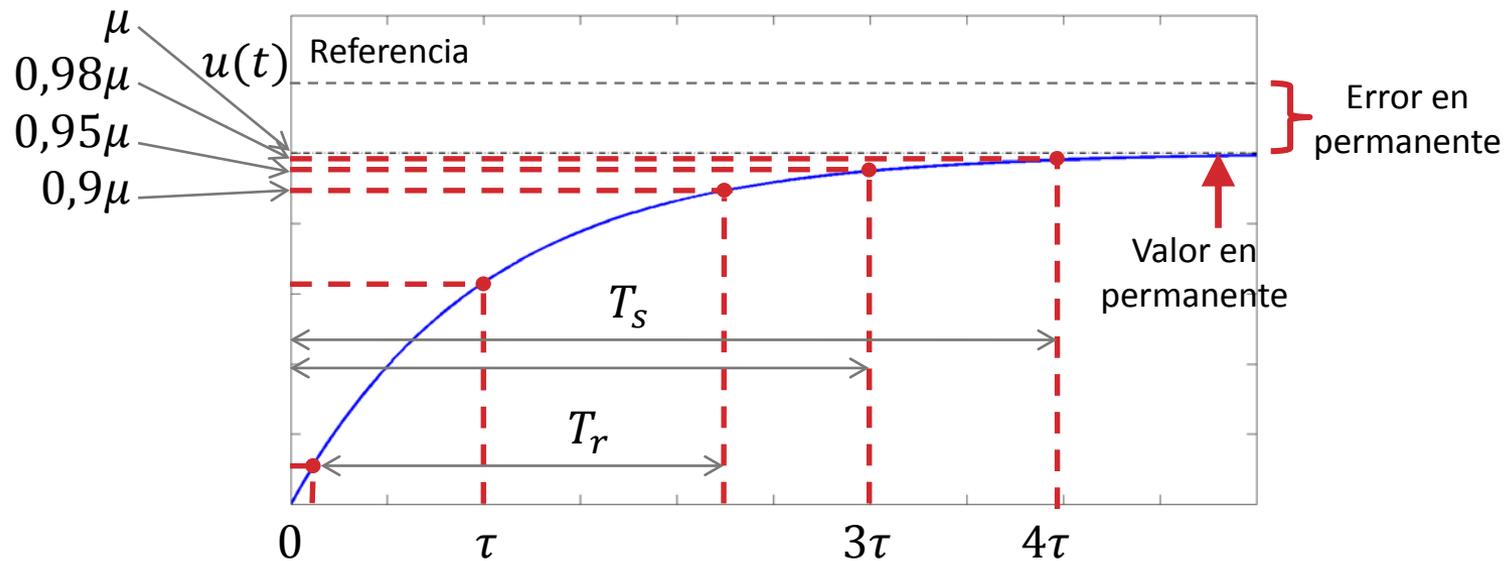
- Respuesta al **escalón unitario**
- Tiempos



```
s = tf('s')
G = tf(5/6 * 1/(s + 1));
step(G);
```

# Sistemas de primer orden

- Respuesta al **escalón unitario**



```
s = tf('s')
G = tf(5/6 * 1/(s + 1));
step(G);
```

# Sistemas de segundo orden

- Dada una FdT

$$G(s) = \frac{\eta}{(s + p_1)(s + p_2)}$$

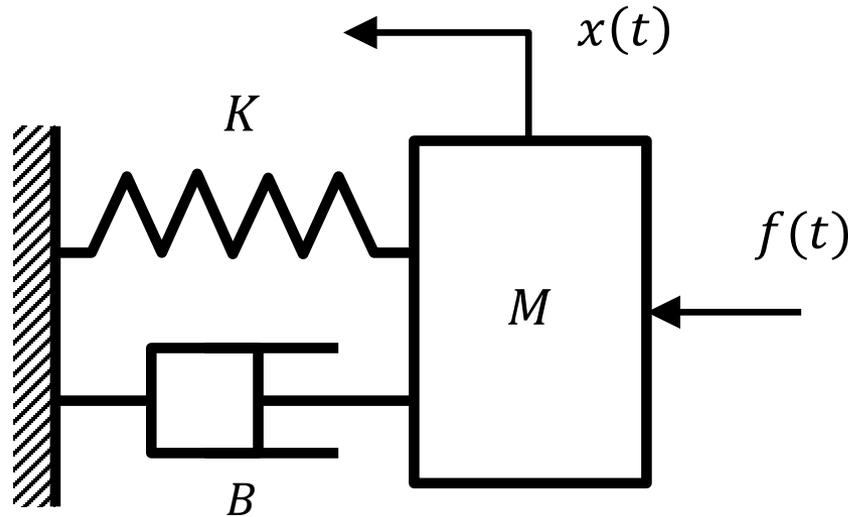
- Su forma **estándar** se define como

$$G(s) = \mu \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

- **Ganancia estática**,  $\mu$
- **Coeficiente de amortiguamiento**,  $\zeta$  (zeta)
- **Frecuencia natural**,  $\omega_n$  (omega ene)
- Reescribir **siempre** el sistema en forma estándar



# Ejemplo de sistema de 2º orden básico



$$F(s) = Ms^2X(s) + BsX(s) + KX(s)$$

$$G(s) = \frac{1}{Ms^2 + Bs + K} = \mu \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\omega_n = \sqrt{K/M}, \quad \zeta = \frac{B}{2\sqrt{KM}}, \quad \mu = \frac{1}{K}$$



# Parámetros de la forma estándar

- Estos parámetros determinan
  - La **forma** de la respuesta
  - Los **tiempos** del transitorio
  - El **valor final** de la salida
- Tienen significado físico
  - $\zeta$  determina el **tipo de respuesta**
  - $\omega_n$  es la frecuencia de **oscilación sin rozamiento**
  - $\mu$  es el **valor final de la salida** ante entrada **escalón unitario** (como en primer orden)

# Configuración de los polos del sistema

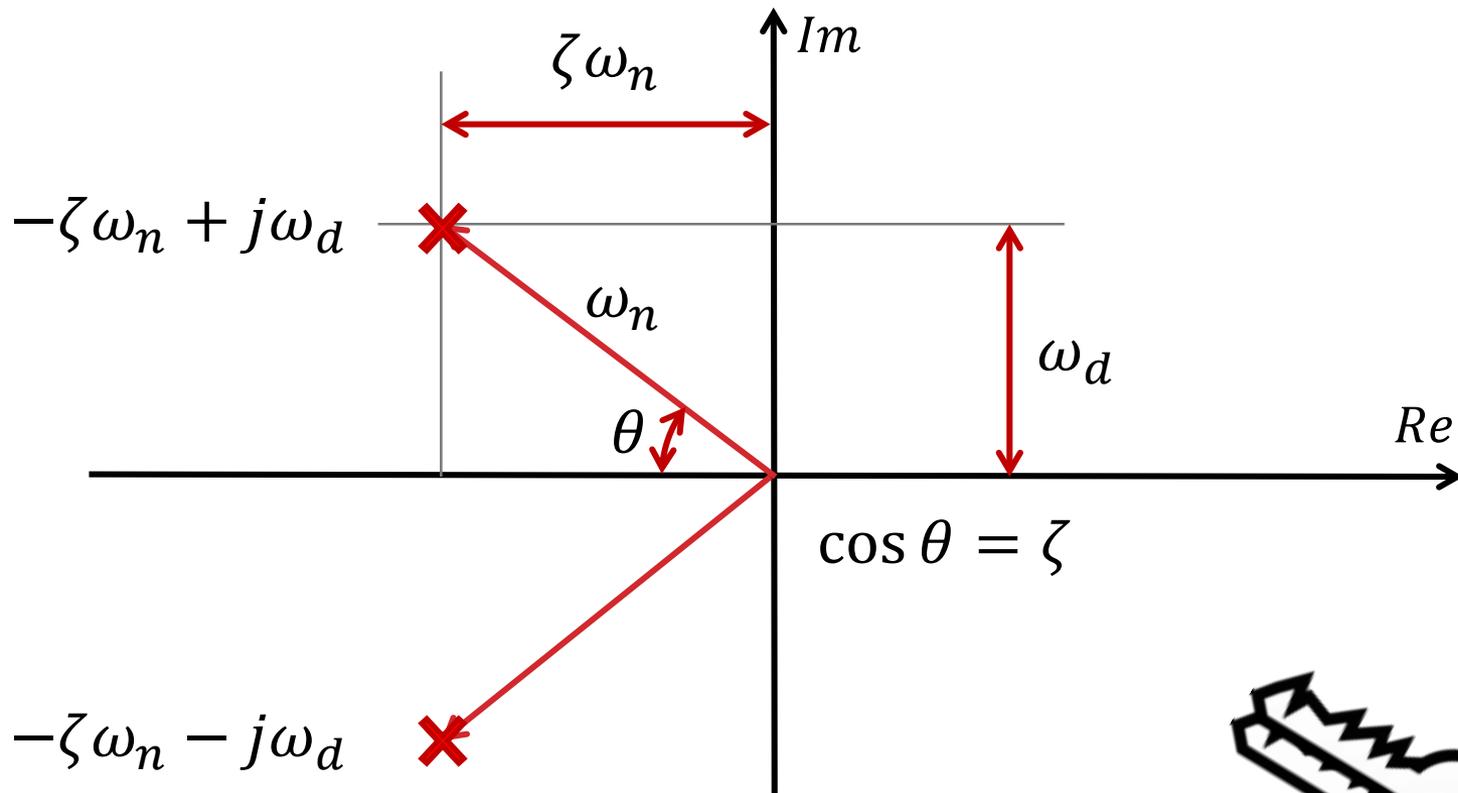
- La respuesta **depende de los polos**
- En la forma estándar de segundo orden éstos son

$$p_{1,2} \text{ en } s = -\omega_n \zeta \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

- En función de  $\zeta$ 
  - $\zeta > 1$  : polos **reales y distintos**
  - $\zeta = 1$  : polos **reales y coincidentes**
  - $0 < \zeta < 1$  : polos **complejos y conjugados**
    - Se puede escribir  $s = -\zeta \omega_n \pm j \omega_d$
  - $\zeta = 0$  : polos **imaginarios puros**
    - Se puede escribir  $s = \pm j \omega_d$

# Interpretación gráfica de parámetros

$$G(s) = \mu \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n + j\omega_d)(s + \zeta\omega_n - j\omega_d)}$$



**¡Solo para polos complejos y conjugados!**

# Respuestas temporales al escalón

- Reales y distintos ( $\zeta > 1$ )

$$y(t) = \frac{\eta}{p_1 p_2} + \frac{\eta}{p_2 - p_1} \left( \frac{e^{-p_2 t}}{p_2} - \frac{e^{-p_1 t}}{p_1} \right)$$

- Reales y coincidentes ( $\zeta = 1$ )

$$y(t) = 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t)$$

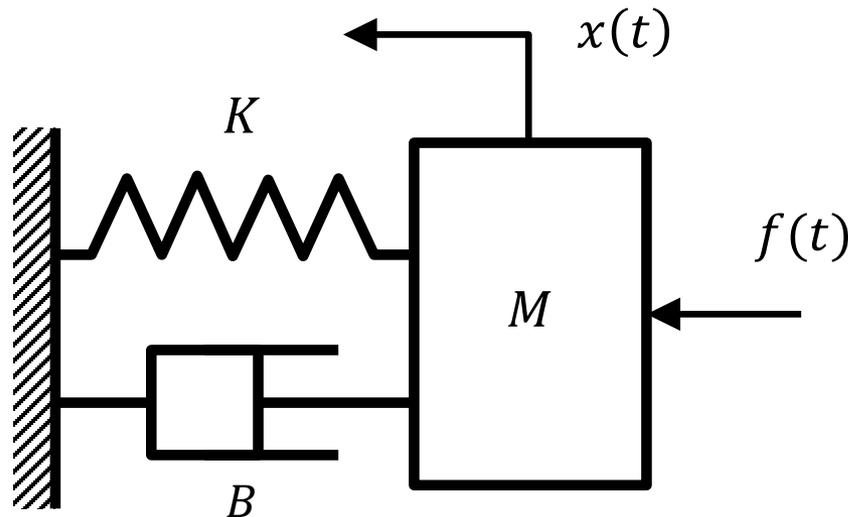
- Subamortiguado ( $0 < \zeta < 1$ ;  $\omega_d < \omega_n$ )

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \cos(\omega_d t - \phi)$$

- No amortiguado ( $\zeta = 0$ ;  $\omega_n = \omega_d$ )

$$y(t) = 1 - \cos(\omega_n t)$$

# Ejemplo de sistema de 2º orden básico



$$F(s) = Ms^2X(s) + BsX(s) + KX(s)$$

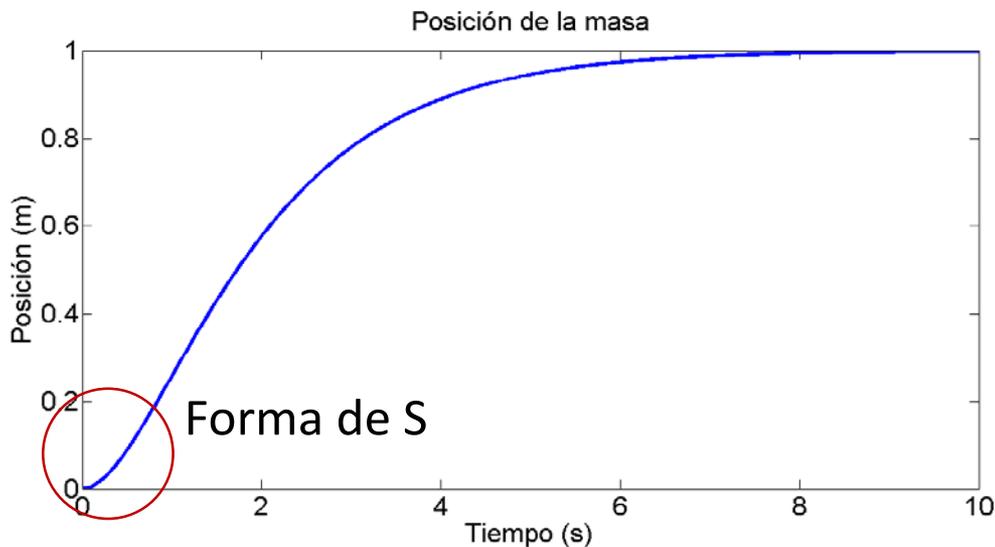
$$G(s) = \frac{1}{Ms^2 + Bs + K} = \mu \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\omega_n = \sqrt{K/M}, \quad \zeta = \frac{B}{2\sqrt{KM}}, \quad \mu = \frac{1}{K}$$

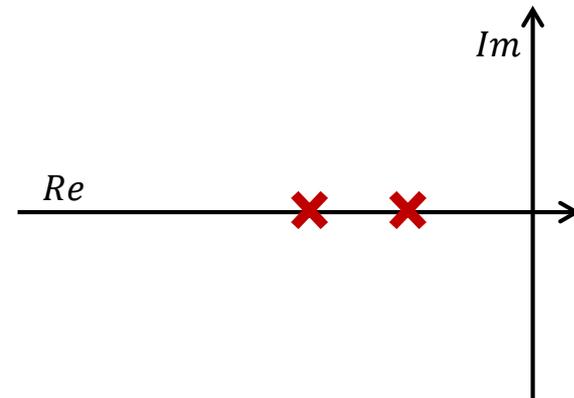


# Respuesta sobreamortiguada

- Polos reales y distintos ( $\zeta > 1$ )
- No oscila ni sobrepasa el valor en permanente



```
G = tf([1],[1 2.1 1]);  
step(G,0:0.1:10);
```

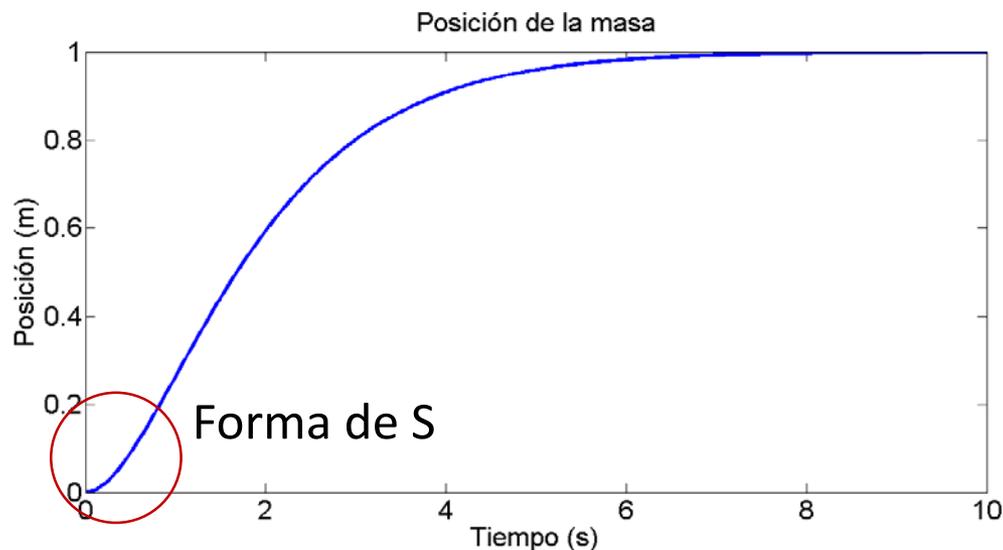


- Ejemplo Masa-muelle-amortiguador

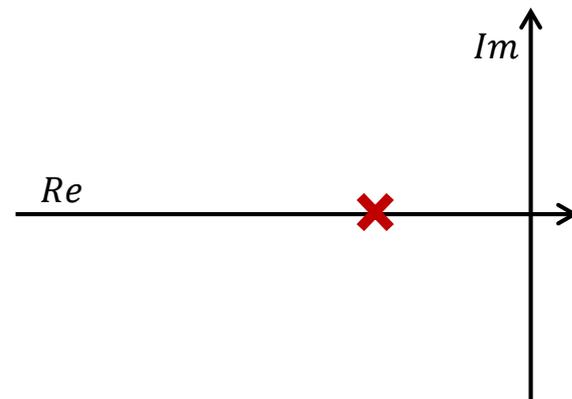
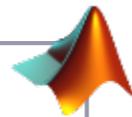
- $M = 1, B = 2.1, K = 1 \Rightarrow \zeta = \frac{B}{2\sqrt{KM}} = 1.05$

# Respuesta críticamente amortiguada

- Polos reales y coincidentes ( $\zeta = 1$ )
- No oscila ni sobrepasa el valor en permanente



```
G = tf([1],[1 2 1]);  
step(G,0:0.1:10);
```

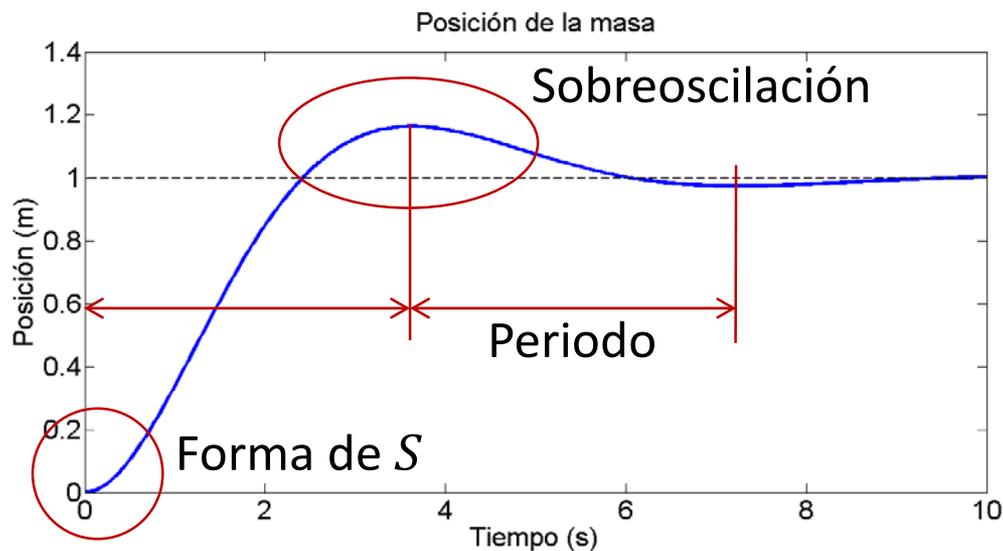


- Ejemplo Masa-muelle-amortiguador

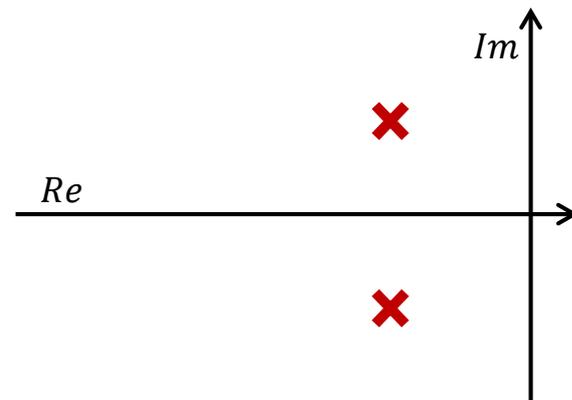
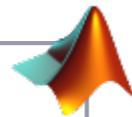
- $M = 1, B = 2, K = 1 \Rightarrow \zeta = \frac{B}{2\sqrt{KM}} = 1$

# Respuesta subamortiguada

- Polos complejos y conjugados ( $\zeta < 1$ )
- Hay sobreoscilación



```
G = tf([1],[1 1 1]);  
step(G,0:0.1:10);
```

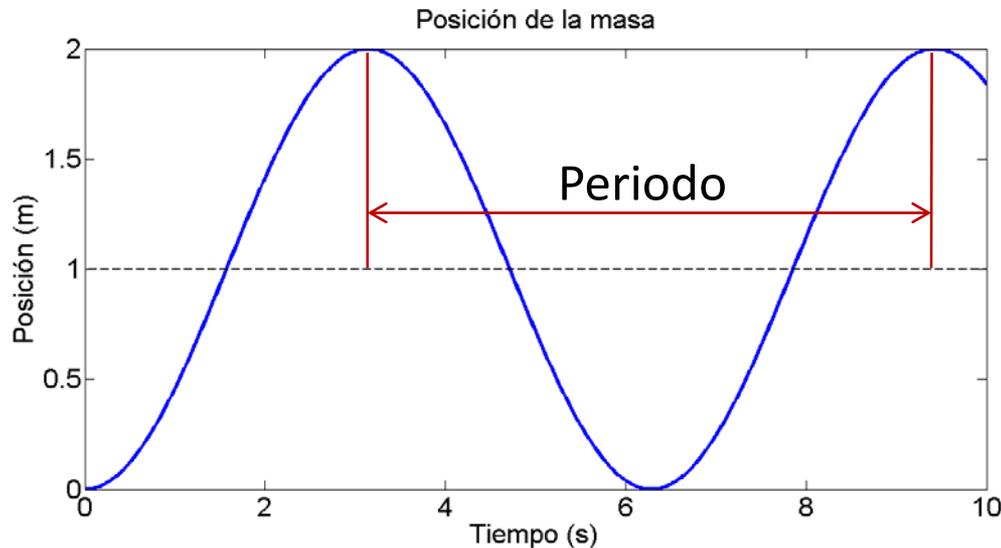


- Ejemplo Masa-muelle-amortiguador

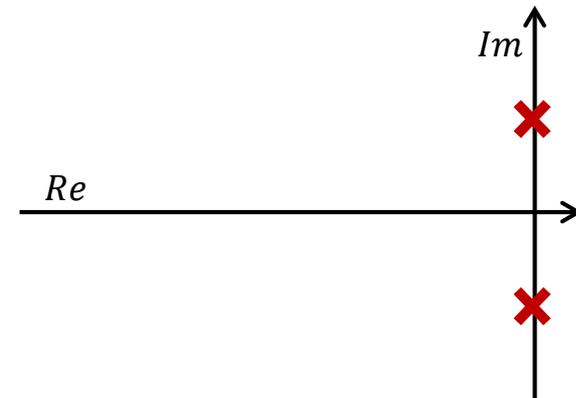
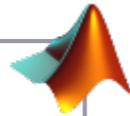
- $M = 1, B = 1, K = 1 \Rightarrow \zeta = \frac{B}{2\sqrt{KM}} = 0.5$

# Respuesta no amortiguada

- Polos imaginarios puros ( $\zeta = 0$ )
- Oscila permanentemente, marginalmente estable



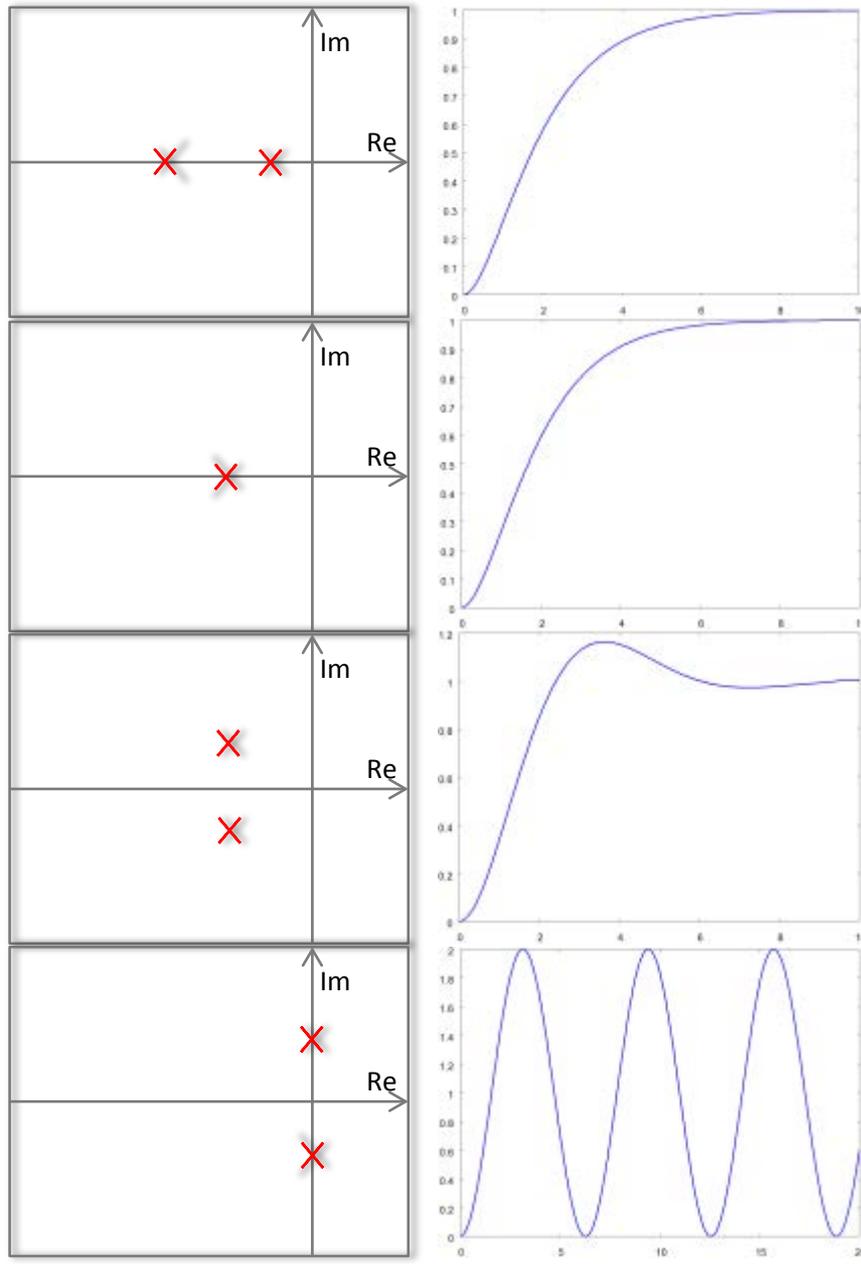
```
G = tf([1],[1 0 1]);  
step(G,0:0.1:10);
```



- Ejemplo Masa-muelle-amortiguador

- $M = 1, B = 0, K = 1 \Rightarrow \zeta = \frac{B}{2\sqrt{KM}} = 0$

# Respuestas al escalón de 2º orden



- Sobreamortiguado
  - Similar a 1er orden
- Críticamente amortiguado
  - El **más rápido sin sobreoscilación**
- Subamortiguado
  - Se **excede** el valor final
- No amortiguado
  - **Oscilación** perpetua

# Características de la respuesta

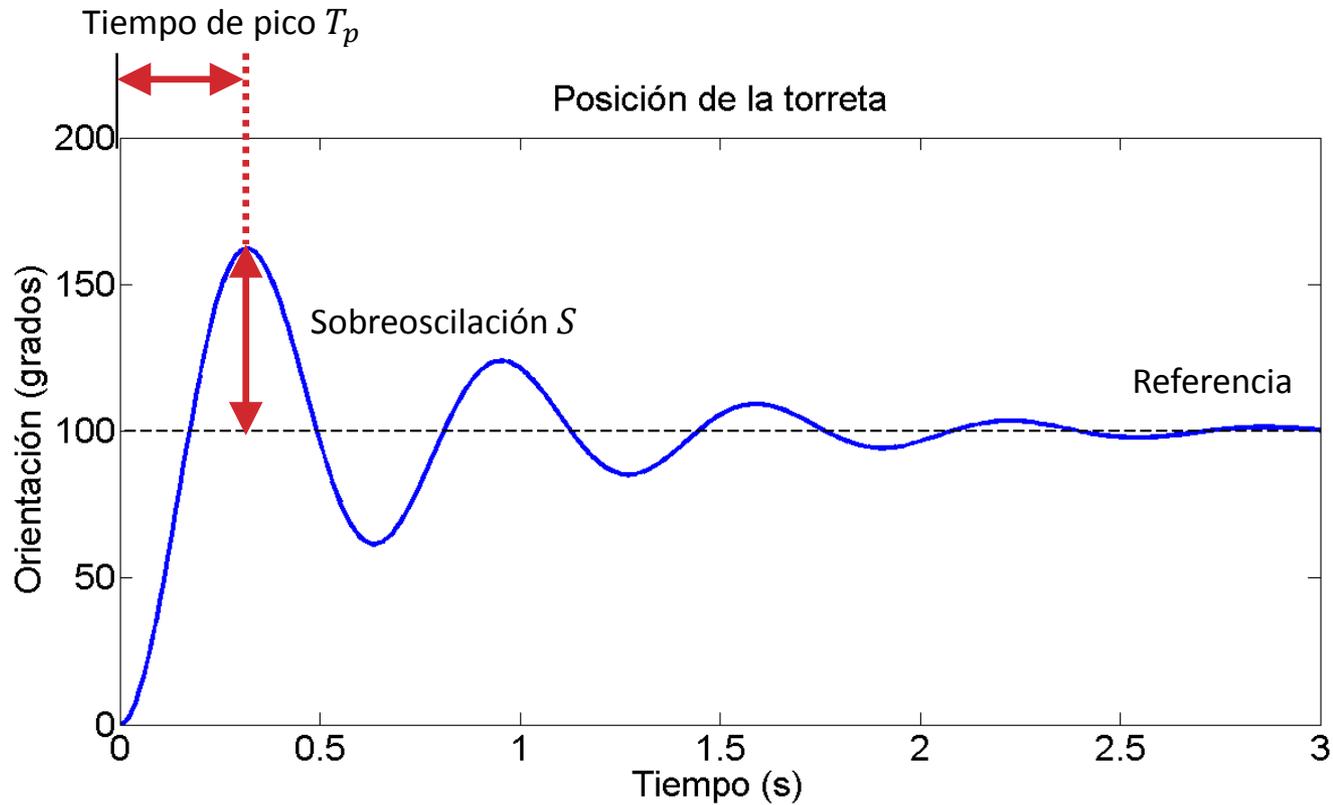
- **Sobreoscilación  $S$**  (*Overshoot*)
  - **Frecuencia** de oscilación **constante**
  - **Porcentaje de superación** sobre el valor final

$$S_{\%} = 100 \cdot \frac{\max y(t) - \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)}{\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)}$$

- **Tiempo de pico  $T_p$**  (*Peak time*)
  - **Tiempo** que tarda la salida en alcanzar el **valor máximo** cuando hay sobreoscilación

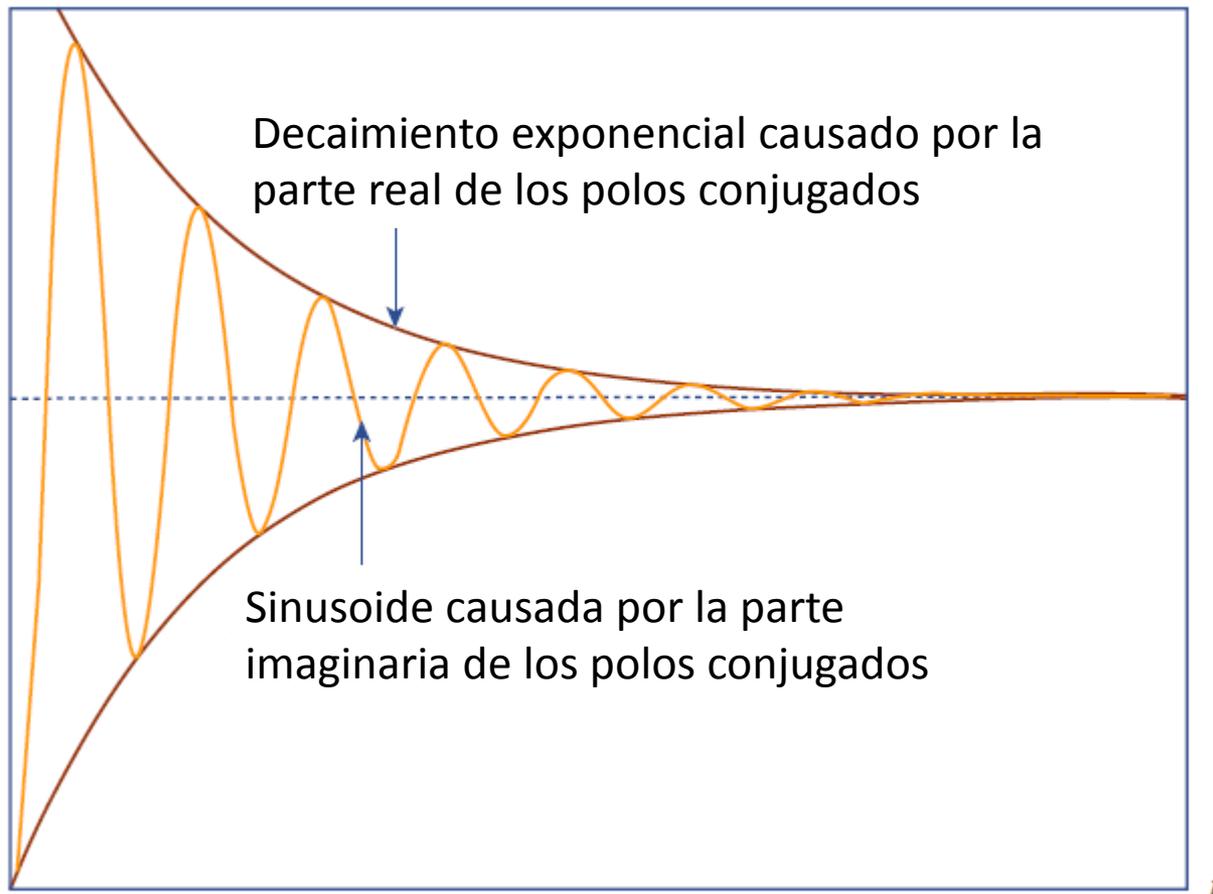
$$T_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

# Características de la respuesta



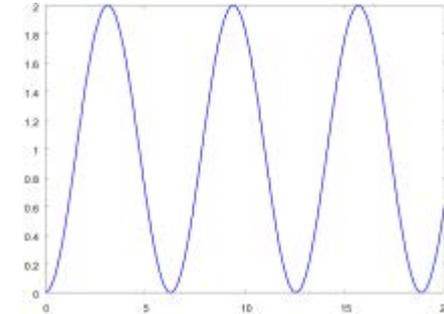
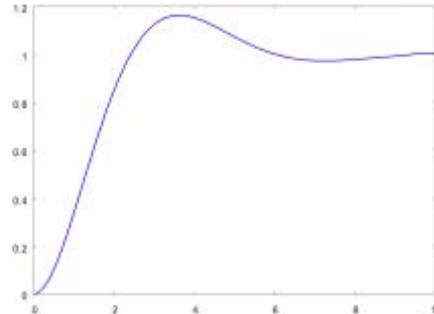
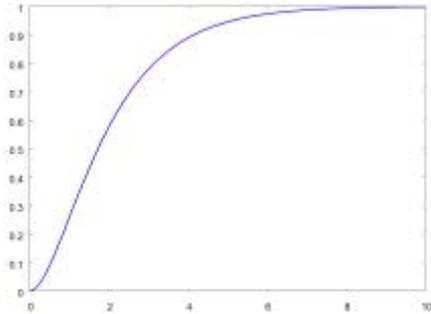
# Componentes de la respuesta

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \cos(\omega_d t - \phi)$$



# Resumen respuestas FdT de 2º orden

- **LEGOpardo 2E**



# Ecuaciones segundo orden

- **Porcentaje de sobreoscilación**

$$S_{\%} = 100 \cdot e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}, \quad \zeta = \frac{-\ln\left(\frac{S_{\%}}{100}\right)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2\left(\frac{S_{\%}}{100}\right)}}$$

- **Tiempo de pico**

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

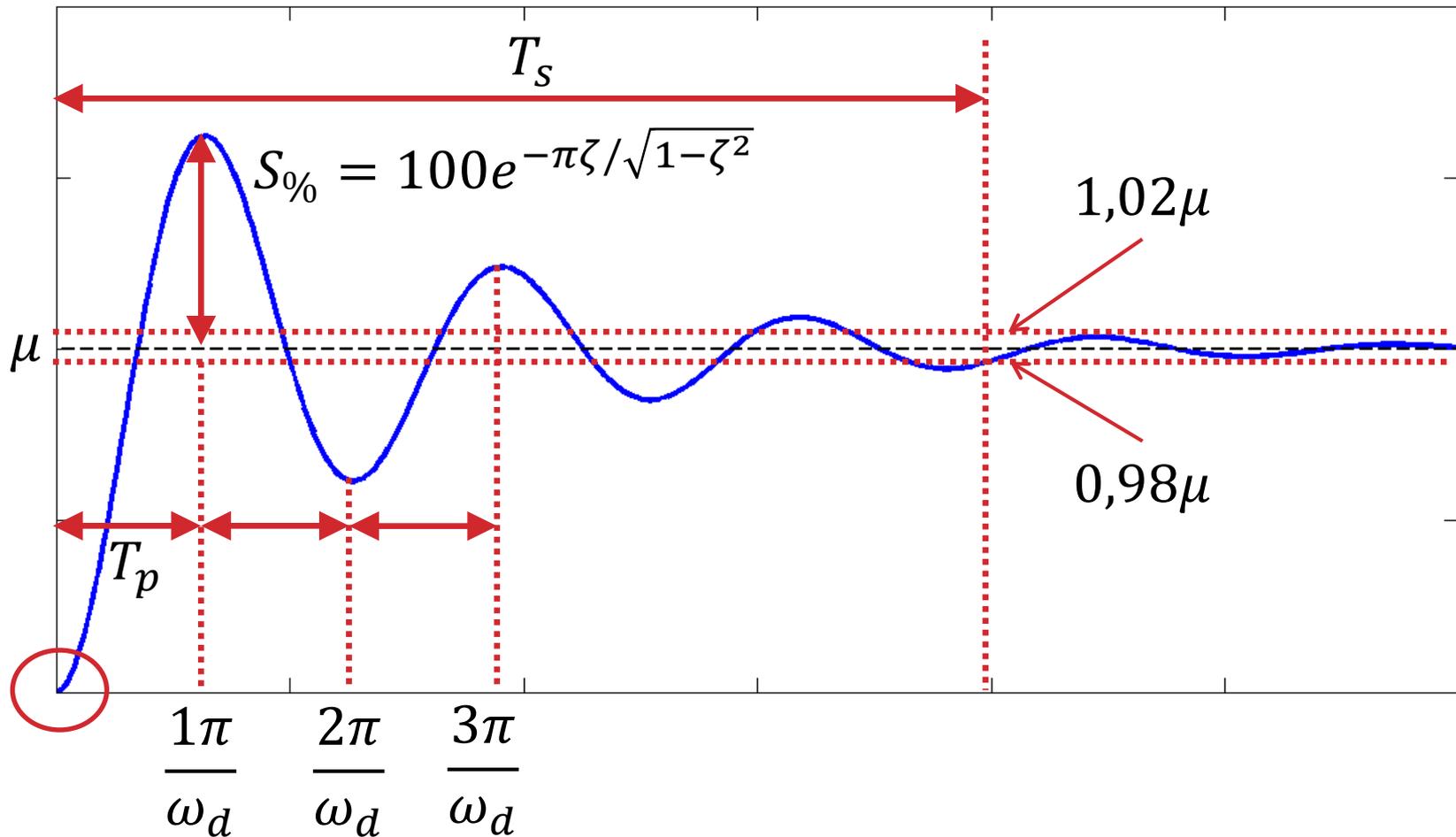
- **Tiempo de respuesta (caso subamortiguado)**

$$T_{S98\%} \approx \frac{4}{\zeta\omega_n}, \quad T_{S95\%} \approx \frac{3}{\zeta\omega_n}$$

- **Frecuencia amortiguada**

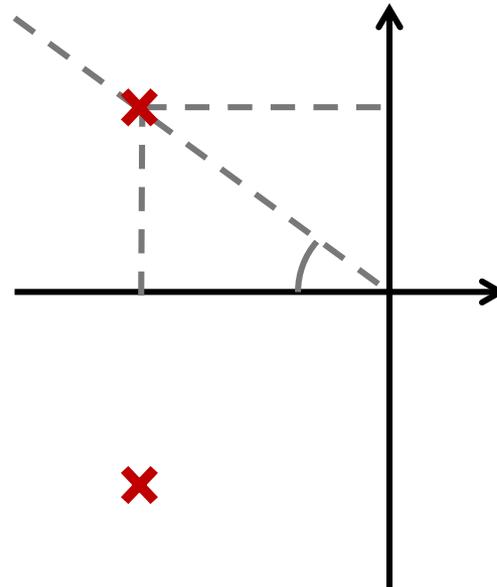
$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

# Respuesta subamortiguada: resumen



# Observaciones finales

- Cambios en la respuesta subamortiguada
  - Con  $\zeta$  constante
  - Con  $\zeta\omega_n$  constante
  - Con  $\omega_d$  constante



# Características comunes

- **Pendiente inicial**

$$y'(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 G(s)R(s)$$

- Valor **inicial**

$$y(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sG(s)R(s)$$

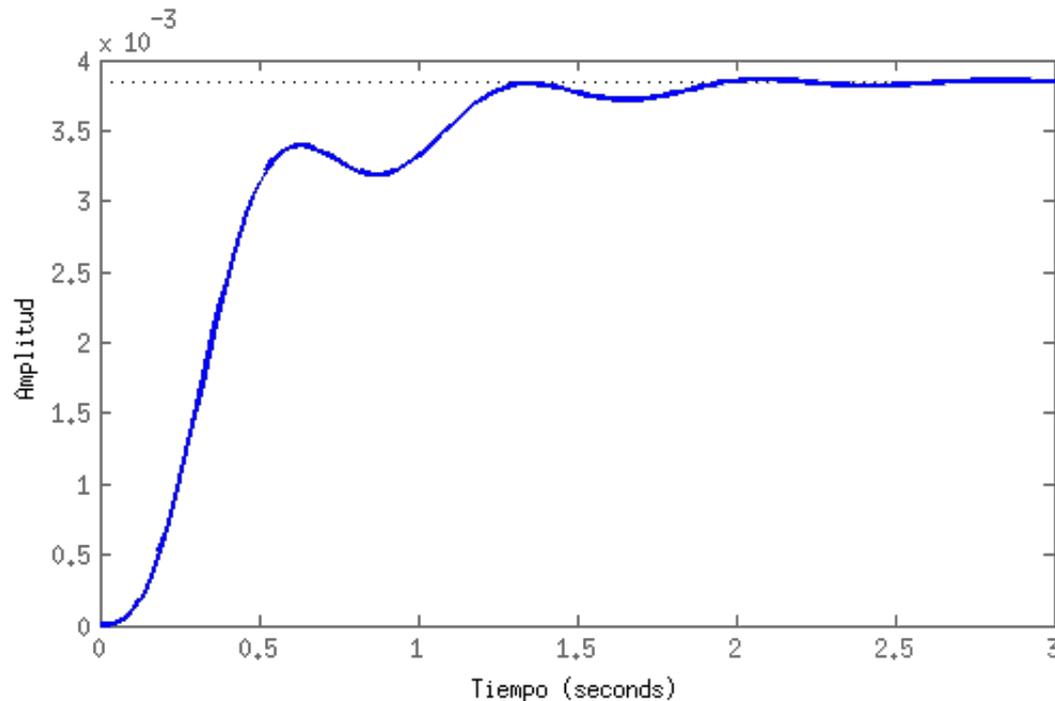
- Valor **final** de un sistema **estable**

$$y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)R(s)$$

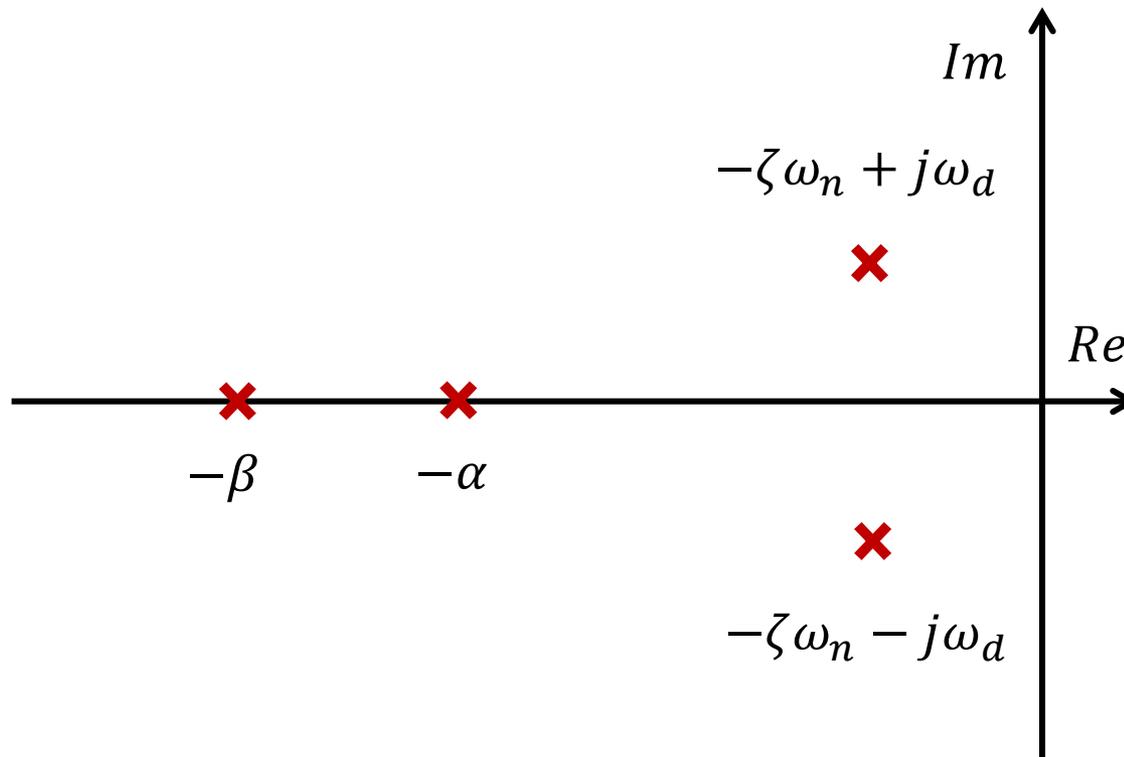
# Sistemas de orden superior

- Aquéllos que tienen **más de dos** polos
- Su **respuesta al escalón** es una **combinación** de respuestas de primer y segundo orden

$$y(t) = a + \sum_{j=1}^n a_j e^{-p_j t} + \sum_{k=1}^n b_k e^{-\sigma_k t} \cos \omega_k t + \sum_{k=1}^n c_k e^{-\sigma_k t} \sin \omega_k t$$



# Sistemas de orden superior



# Aproximación a sistemas de 2º orden

- Polo adicional **más cercano** en  $s = -\alpha$
- **Si la relación** entre las **parte reales**

$$\frac{\alpha}{\zeta\omega_n} \geq 5$$

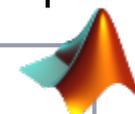
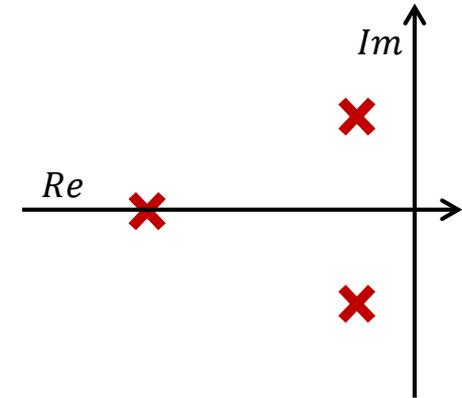
- Se puede hablar **de (pareja de) polos dominantes** y **despreciar** la aportación de los otros polos
  - 😊 Comportamiento similar a **segundo orden**
  - ☹ **Cambio** en la **ganancia no despreciable**
- **Antes** de aproximar, comprobar **siempre la dominancia** de los polos más próximos al origen

# Aproximación a sistemas de 2º orden

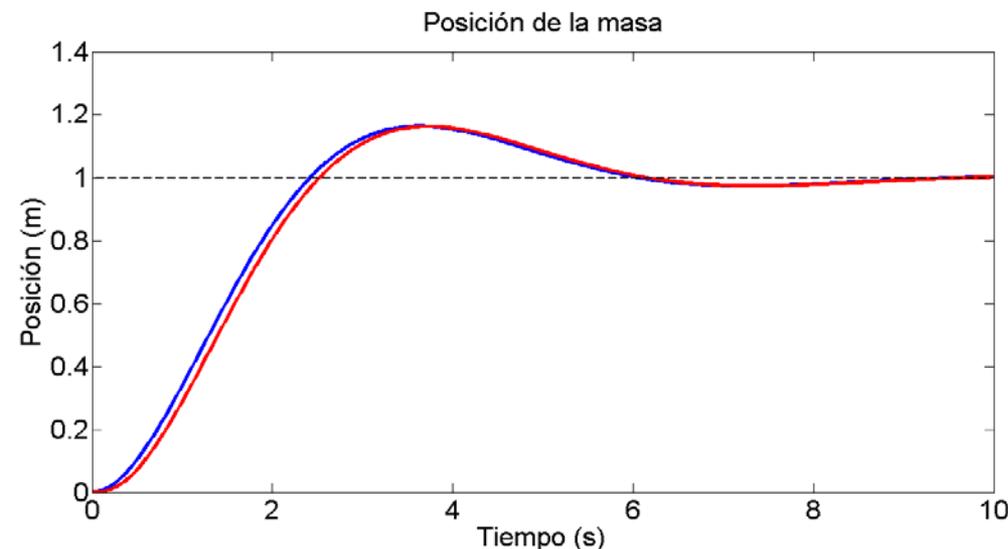
$$G(s) = \frac{10}{(s^2 + s + 1)(s + 10)} \approx \frac{1}{(s^2 + s + 1)}$$

Tenemos:

- Polos complejos con parte real  $-\zeta\omega_n = -0.5$
- Polo real con parte real  $-\alpha = -10$



```
G = tf([1],[1 1 1]);  
[y,time] = step(G,0:0.01:10);  
G2 = tf([10],[1 11 11 10]);  
[y2,time] = step(G2,0:0.01:10);  
figure(1)  
axes('FontSize',24)  
plot(time,y,'LineWidth',3)  
hold on  
plot(time,y2,'r','LineWidth',3)  
title('Posición de la masa')  
xlabel('Tiempo (s)')  
ylabel('Posición (m)')
```

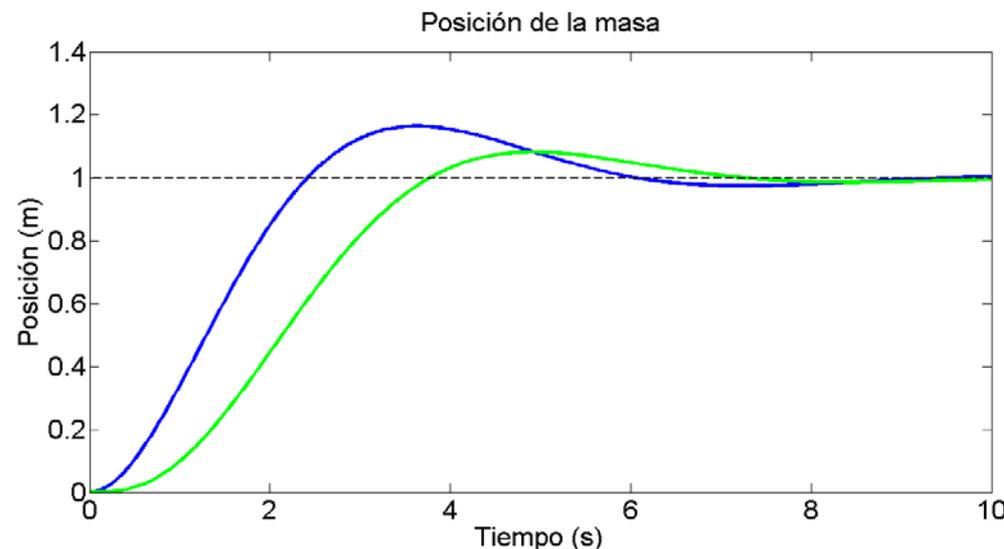
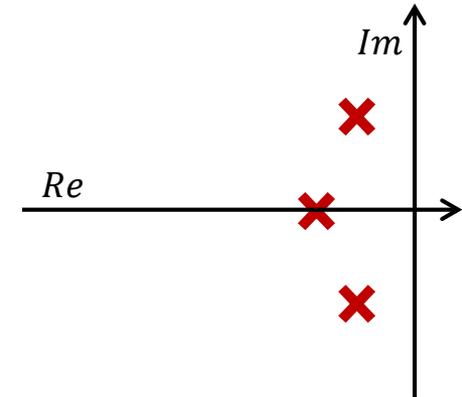


# Aproximación a sistemas de 2º orden

$$G(s) = \frac{1}{(s^2 + s + 1)(s + 1)} \neq \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

Tenemos:

- Polos complejos con parte real  $-\zeta\omega_n = -0.5$
- Polo real con parte real  $-\alpha = -1$

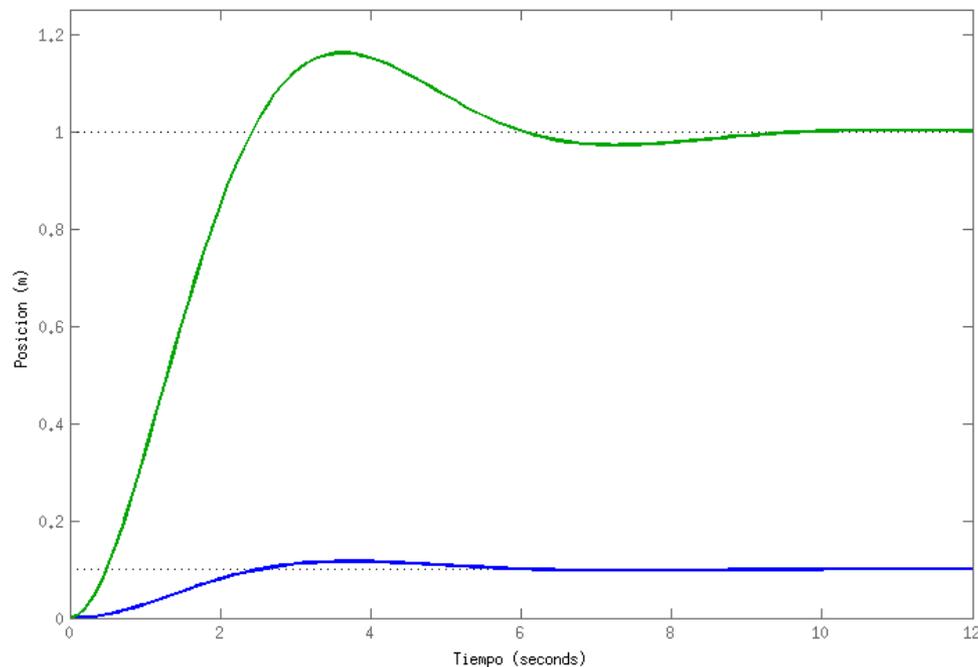


```
G = tf([1],[1 1 1]);  
[y,time] = step(G,0:0.01:10);  
G2 = tf([1],[1 2 2 1]);  
[y2,time] = step(G2,0:0.01:10);  
figure(1)  
axes('FontSize',24)  
plot(time,y,'LineWidth',3)  
hold on  
plot(time,y2,'g','LineWidth',3)  
title('Posición de la masa')  
xlabel('Tiempo (s)')  
ylabel('Posición (m)')
```

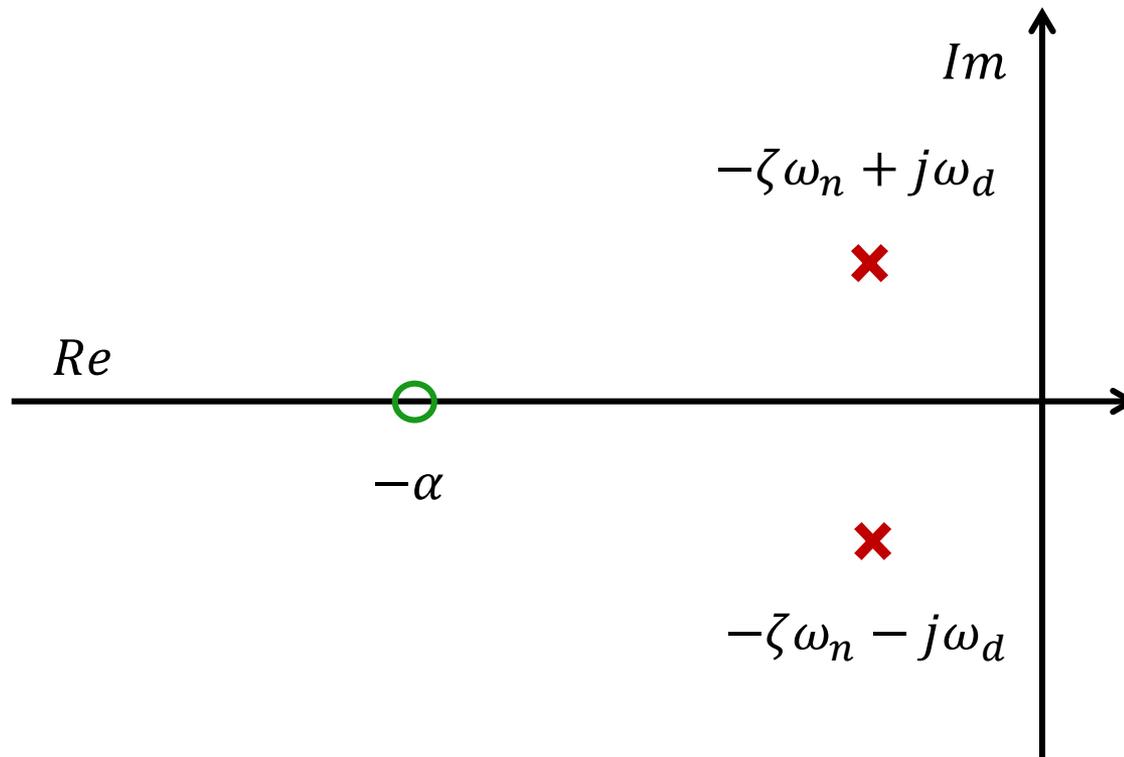
# Cambio en la ganancia

- La aproximación a segundo orden puede conllevar **cambios drásticos** de **ganancia**
- Ejemplo:

$$G(s) = \frac{1}{(s^2 + s + 1)(s + 10)} \neq \frac{1}{(s^2 + s + 1)}$$



# Influencia de los ceros



# Influencia de ceros en la FdT

- Si añadimos un **cero** a una  $G(s)$  se puede escribir:

$$G_Z(s) = (s + \alpha) \cdot G(s) = s \cdot G(s) + \alpha \cdot G(s)$$

$$Y_Z(s) = G_Z(s) \cdot R(s) = [s \cdot G(s) + \alpha \cdot G(s)] \cdot R(s)$$

## Efecto **derivativo**

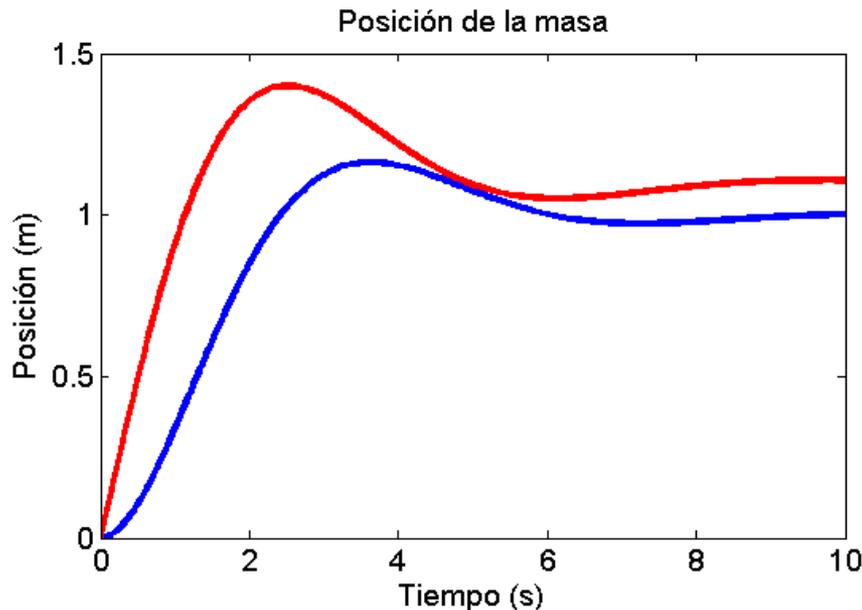
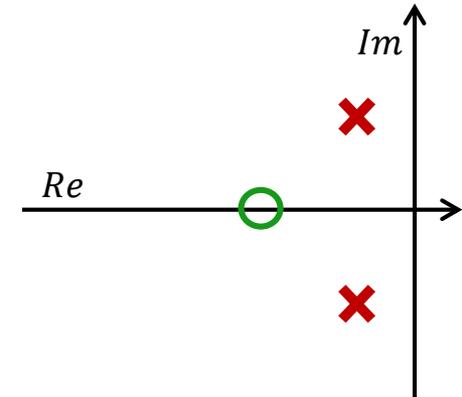
- Afecta el **transitorio**
- Puede aparecer **sobrepasamiento**
- Efecto **amplificativo**
  - Afecta al **permanente**
  - **Cambia la ganancia** del sistema

# Influencia de los ceros en la FdT

$$G(s) = \frac{1}{(s^2 + s + 1)} \neq \frac{s + 1.1}{(s^2 + s + 1)}$$

Tenemos:

- Polos complejos con parte real  $-\zeta\omega_n = -0.5$
- Cero real con parte real  $-\alpha = -1.1$



```
G = tf([1],[1 1 1]);  
[y,time] = step(G,0:0.01:10);  
G2 = tf([1 1.1],[1 1 1]);  
[y2,time] = step(G2,0:0.01:10);  
figure(1)  
axes('FontSize',24)  
plot(time,y,'LineWidth',3)  
hold on  
plot(time,y2,'r','LineWidth',3)  
title('Posición de la masa')  
xlabel('Tiempo (s)')  
ylabel('Posición (m)')
```

# Influencia de los ceros en la FdT

- ¿Cuánto influye un cero?
- Dada la FdT

```
G(s):=(s+z)/s/(s+p1)/(s+p2);  
partfrac(G(s),s);  
ilt(G(s),s,t);
```



$$G(s) = \frac{s + z}{(s + p_1)(s + p_2)}$$

- Su respuesta ante escalón **en el dominio del tiempo** es:

$$y(t) = \frac{e^{-p_2 t} (z - p_2)}{p_2^2 - p_1 p_2} - \frac{e^{-p_1 t} (z - p_1)}{p_1 p_2 - p_1^2} + \frac{z}{p_1 p_2}$$

- Si el cero esta cerca de uno de los polos, el **influjo** de éste último en la salida **se verá reducido**
- La **posición** del cero **con respecto al origen** también condiciona la respuesta

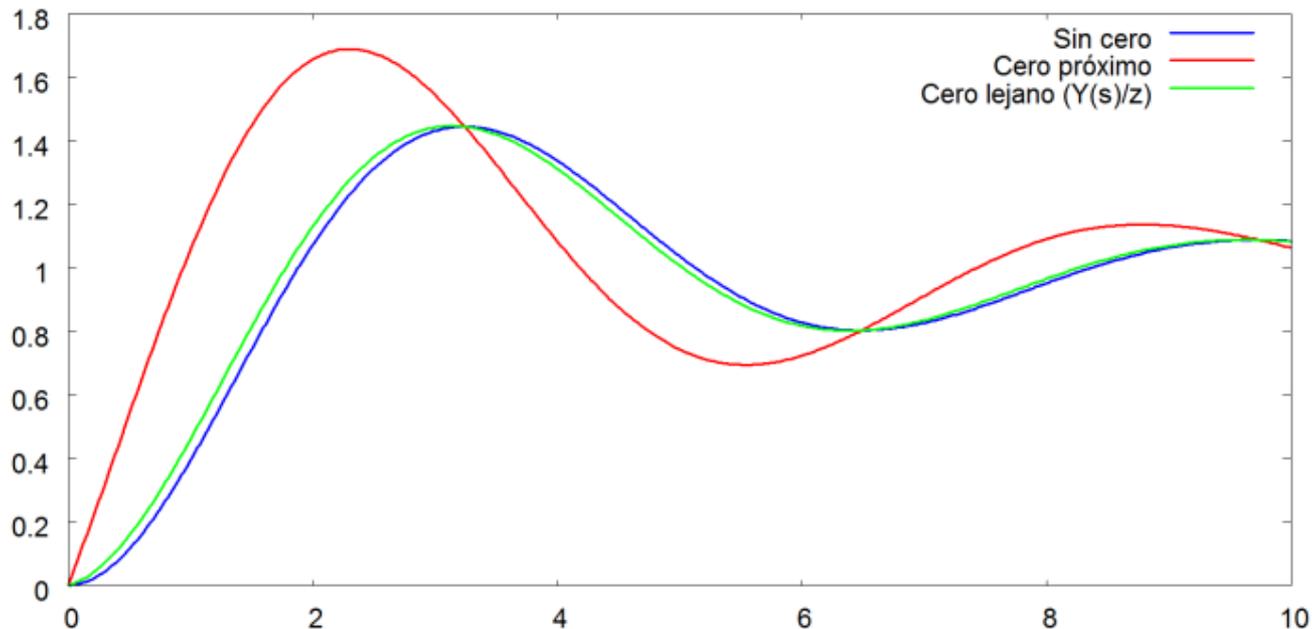
# Posición de los ceros con respecto al origen

- Dado que

$$Y_2(s) = (\eta s + z)Y_1(s) = \eta s Y_1(s) + z Y_1(s)$$

- Si  $\eta \approx 0 \Rightarrow$  Efecto derivativo despreciable
- Si  $z \approx 1 \Rightarrow$  Efecto amplificativo despreciable

e.g.:  $\frac{1}{s^2+0.5s+1}$ ,  $\frac{s+1}{s^2+0.5s+1}$ ,  $\frac{1}{10} \cdot \frac{s+10}{s^2+0.5s+1}$



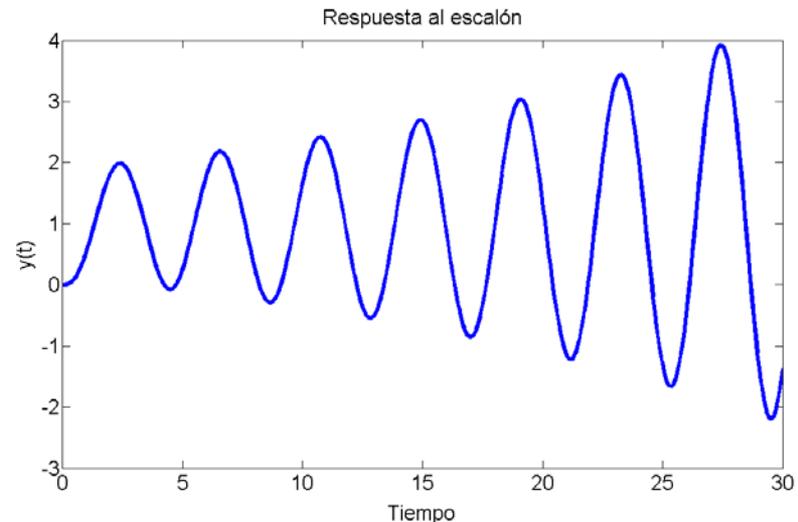
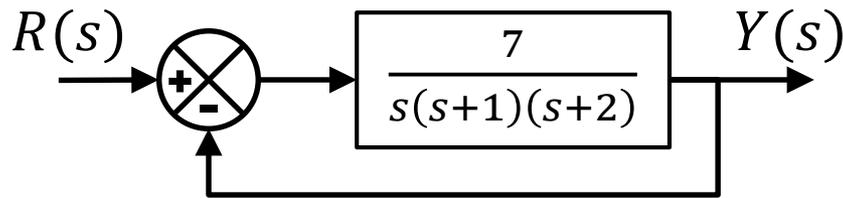
# Obtención empírica de la FdT

- Dada una gráfica de salida
  - Identificar el **tipo de respuesta**
  - Identificar los **parámetros**
- **Aproximación FdT de segundo orden**



# Estabilidad

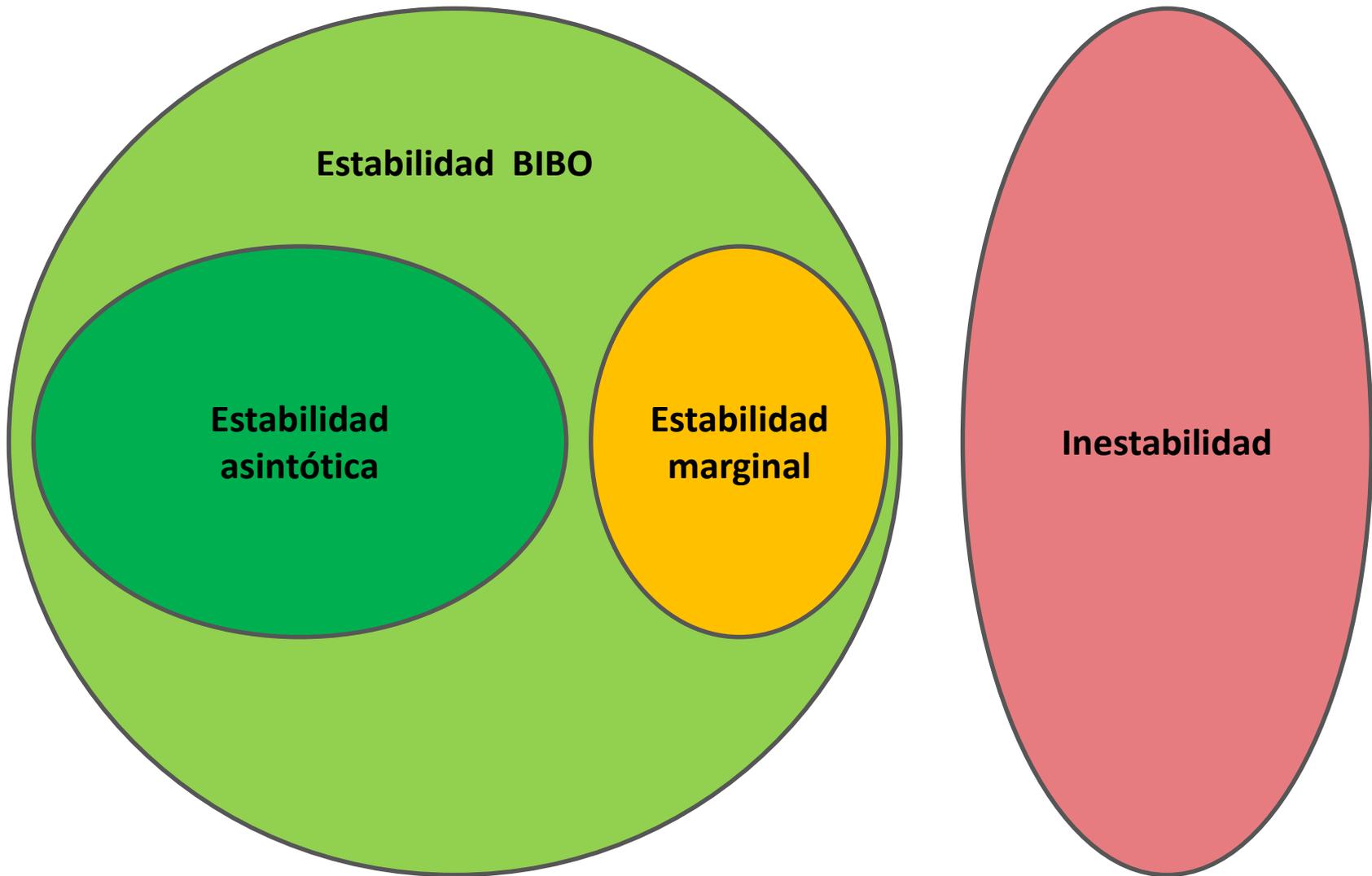
- La **estabilidad** es la especificación más importante de cualquier sistema
- Si un sistema es **inestable**, el transitorio y el valor final del permanente no se pueden definir
- Hasta ahora sólo hemos visto propiedades de **sistemas estables**



# Definiciones de estabilidad

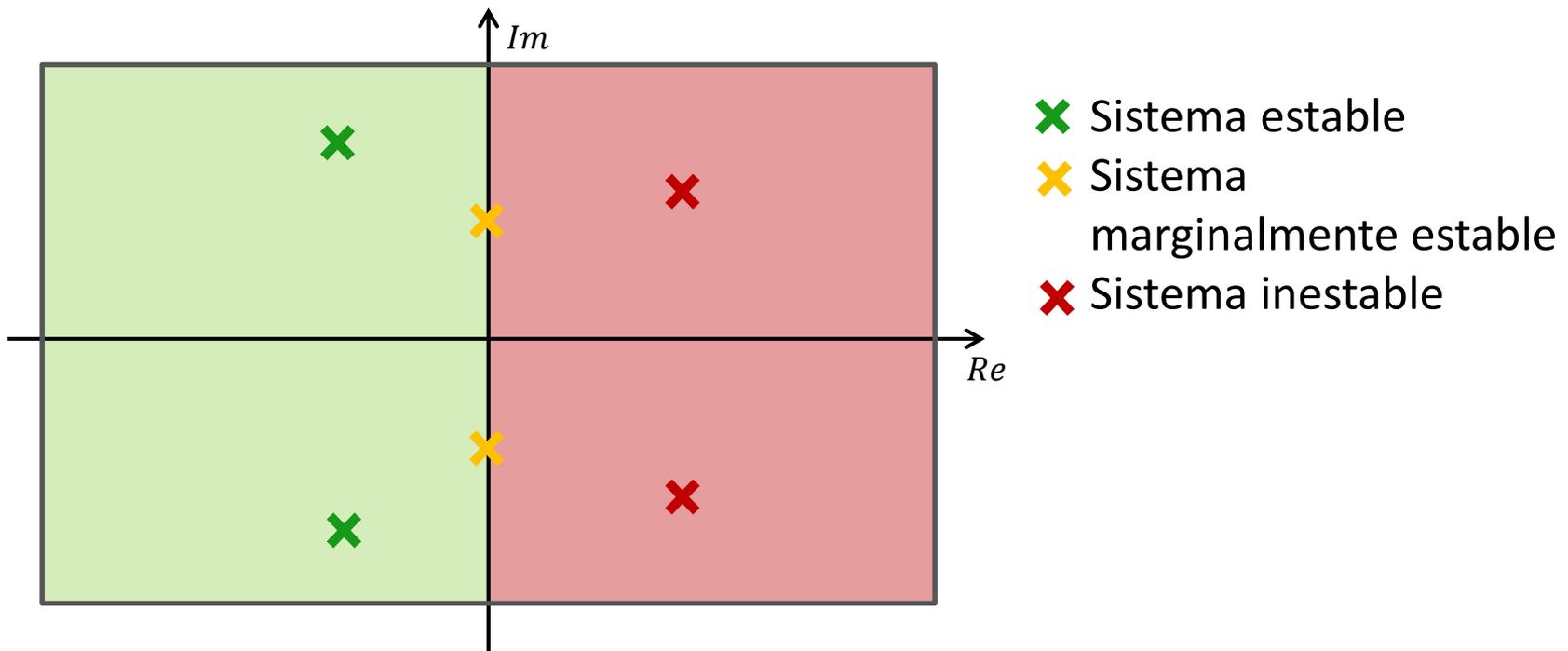
- **Estabilidad BIBO** (*bounded-input bounded-output*)
  - Sistema cuya **salida es acotada** para **cualquier entrada acotada**
- **Estabilidad asintótica**
  - Sistema cuya salida tiende a un **valor finito** cuando **la entrada es constante**
- **Estabilidad marginal**
  - Sistema cuya salida **oscila de forma acotada sin converger**
- **Inestabilidad**
  - Un sistema **no** estable BIBO

# Estabilidad



# Estabilidad y polos del sistema

- La **estabilidad** la determinan los **polos de la FdT**
  - Todos en el **semiplano izquierdo**
  - **Parte real negativa**

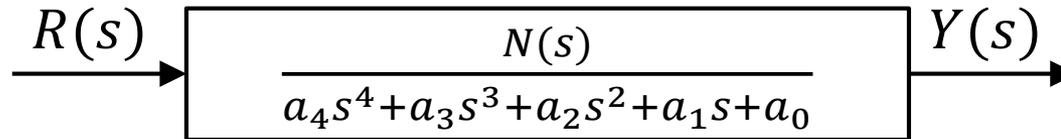


$$y(t) = \frac{\eta}{p_1 p_2} + \frac{\eta}{p_2 - p_1} \left( \frac{e^{-p_2 t}}{p_2} - \frac{e^{-p_1 t}}{p_1} \right)$$

# ¿Cómo determinar si un sistema es estable?

- Partiendo de  $G(s) = N(s)/D(s)$ 
  - $D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$
  - **Condición necesaria** (no suficiente)
    - $a_i > 0$ , para todo  $i = 1, \dots, n$
- Aplicar el **criterio de Routh-Hurwitz**
  - Permite saber
    - El número de **polos en cada semiplano**
    - El número de **polos en el eje imaginario**
  - Permite verificar la **estabilidad** al **variar un parámetro**
  - **No** proporciona la **ubicación exacta**

# Generación de la tabla de Routh

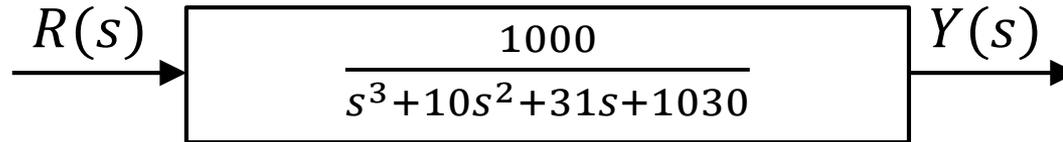


$s^4$	$a_4$	$a_2$	$a_0$
$s^3$	$a_3$	$a_1$	$0$
$s^2$	$-\frac{\begin{vmatrix} a_4 & a_2 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}}{a_3} = b_1$	$-\frac{\begin{vmatrix} a_4 & a_0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3} = b_2$	$-\frac{\begin{vmatrix} a_4 & 0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3} = 0$
$s^1$	$-\frac{\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1} = c_1$	$-\frac{\begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}}{b_1} = 0$	$-\frac{\begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}}{b_1} = 0$
$s^0$	$-\frac{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = d_1$	$-\frac{\begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = 0$	$-\frac{\begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = 0$

# Interpretación de la tabla de Routh

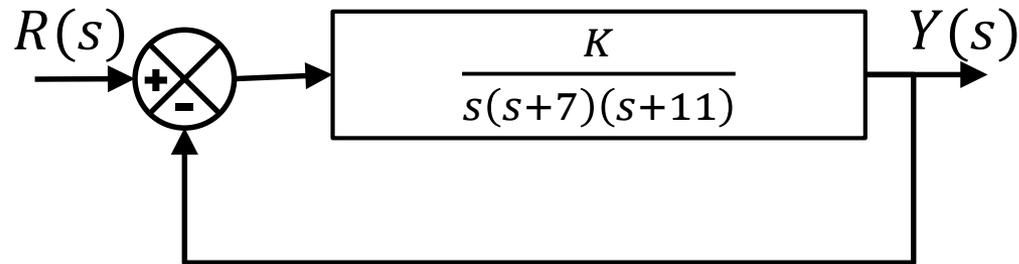
- El **número de polos** de la FdT en el **semiplano derecho** es igual al **número de cambios de signo** que se producen en la **primera columna** de la tabla
- Estabilidad de un sistema
  - **La primera columna** de la tabla de Routh **no tiene cambios de signo**

# Generación de la tabla de Routh




# Diseño de estabilidad usando Routh

- Calcular la tabla de Routh del siguiente sistema realimentado
- Analizar los valores de  $K$  para los que es estable



# Resumen

- **Análisis de respuesta de sistemas**
  - Depende de la entrada y la FdT
  - Entradas estándar
- **Análisis para un escalón unitario**
  - Características de la respuesta
  - Primer y segundo orden
  - Forma estándar y tipo de la respuesta
  - Influencia de polos y ceros adicionales
  - Obtención empírica de la FdT
- **Estabilidad de sistemas**
  - Criterio de Routh-Hurwitz